A KINEMATIKAI ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA ELEMEI

HAJDU ENDRE

ELŐSZÓ

Ez a dolgozat egy kinematikával ötvözött ábrázoló geometria kidolgozásának lehetőségét (talán indokoltságát is) kíséreli meg igazolni. Elsősorban a kinematikai eszközöknek a felületek ábrázolásában való alkalmazási lehetőségeit mutatja be.
Mint ismeretes, a kinematikában alapvető szerepe van egy, a geometriától idegen fogalomnak, az időnek is; magyarázatot igényel, hogy mégis miért érdemes kísérletet tenni a kinematikai eszközöknek egy olyan geometriai tudományágban való alkalmazására, mint az ábrázoló geometria. 1932-ből származik a következő – R. v. Mises-től származó – vélemény: *Igen kívánatos lenne [...] annak vizsgálata, hogy meddig terjednek elvileg az ábrázoló, azaz konstruktív geometria módszerei; milyen szerkesztési feladatok oldhatók meg a szokott segédeszközökkel [...]. Mindaddig, amíg ilyen kérdések megválaszolatlanok, hiszen fel sem vetődtek, az ábrázoló geometria mindig csupán egyes feladatok gyűjteményének jellegével bír, melyet nem fognak össze elegendően általános gondolatok* [R.v.Mises ZAMM. B.12.1932] ; aligha vitatható vélemény. Részben az elegendően általános gondolatok, módszerek hiánya miatt olyan szűkös az ábrázoló geometria tankönyveiben tárgyalt felületek választéka. A másodrendű felületeken, forgás- és csavarfelületeken kívül alig találunk más felületfajtákat. Nem is várható több – hatékony, általánosan alkalmazható módszerek hiányában – egy olyan geometriai tudományágtól, mely szerkesztései során, gyakorlatilag alig épít egy olyan alapvető matematikai fogalomra, mint a derivált.
Ezen a hiányon segíthet a kinematika alkalmazása, mikor a sebességvektort, mint deriváltat szerkesztési elemként használja fel. A szokásos ábrázoló geometriai eszközökkel már egy-egy szokatlanabb felület ábrázolása, vagy egy felületi ponthoz tartozó érintősík megszerkesztése is nehézséget jelenthet. Ilyenféle problémák – legalább a vonalfelületek esetében – elhárulnak a kinematikai eszközök alkalmazása révén. További előnyt jelenthet a tárgyalandó módszer, a konstruktív differenciálgeometria oktatása, szemléltetési lehetőségei során.

MOZGÁSGEOMETRIA, KINEMATIKA

A jelen dolgozat lényegi mondanivalója: tekintsük a vetületeket, illetve az ábrázolandó pontokat, egyeneseket, síkokat, sőt vetületeiket is, mozgó, mozgatható alakzatoknak avégett, hogy a geometriai feladatok megoldásához a kinematika eszközei is használhatók legyenek, s ezzel növekedjen a hagyományos ábrázoló geometria hatékonysága.
A mozgásgeometria az alakzatok lehetséges mozgásával kapcsolatos kérdéseket vizsgálja geometriai szempontból; jellegzetes feladata annak bizonyítása, hogy egy síkban mozgó alakzat elmozdulása vagy egyetlen pont körüli elforgatás vagy egyetlen eltolás. Alapvető fogalma a momentán centrum: az a pont, mely körül a síkban mozgó alakzat pillanatnyi mozgását végzi.
A kinematika is a mozgásokat vizsgálja, de az idő figyelembevételével. Alapvető fogalma a sebesség és a gyorsulás. Jellegzetes feladata annak igazolása, hogy egy síkban mozgó alakzatnak általános esetben egyetlen zérus sebességű pontja van egy adott pillanatban, a sebességpólus, ami azonos a momentán centrummal. Már e nevezetes pont példája is mutatja, hogy nem lehet éles határt vonni a mozgásgeometria és a terjedelmesebb tudományág, a kinematika között.
A kinematika is egyike azon ismeretköröknek, melyek korán, már a 19. században érintkeztek az ábrázoló geometriával, bár szinte csak a momentán centrum fogalma nyert itt-ott alkalmazást. A jelen dolgozat megkísérli annak igazolását, hogy léteznek kiaknázatlan lehetőségei a kinematika ábrázoló geometriai alkalmazásának, még akkor is, ha napjainkban a grafikus

módszerek vesztettek jelentőségükből.
A jelen összeállítás a korábban közölt, a szerző KINEMATIKAI ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA című dolgozatának javított, bővített változata.

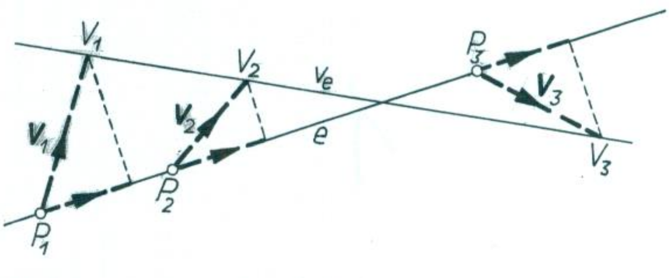
KINEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

Az alábbiakban azokat a kinematikai fogalmakat, tételeket soroljuk fel, melyekre a továbbiakban szükség lesz. A tételek bizonyítása az esetek többségében itt nem szerepel.

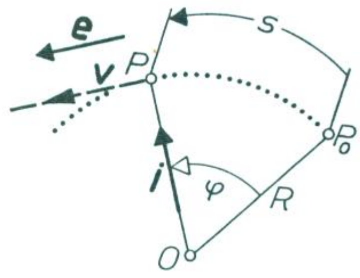
SEBESSÉG
A kinematika említett két mozgásjellemzője, a sebesség és gyorsulás közül a továbbiakban csak a sebességre lesz szükség. Ha egy mozgó pont t, ill. $t+\Delta t$ időponthoz tartozó helyvektorai $\mathbf{r}(t)$, ill. $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, akkor a t időponthoz tartozó sebességvektor :

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t) \ .$$

Vagyis a sebességvektor a helyvektor idő szerinti deriváltja. Feltesszük, hogy a pont mozgását leíró $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ mozgásfüggvény legalább kétszer differenciálható az idő szerint.
Az alábbi három tétel a síkban vagy térben mozgó egyenes pillanatnyi mozgásállapotával kapcsolatos.
Tétel. Egy mozgó egyenes pontjainak pillanatnyi sebességvektor-végpontjai egyenest alkotnak, az egyenes sebességvonalát. Valamely e egyenes sebességvonalát v_e jelöli a továbbiakban (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Síkban mozgó e egyenes sebességvonala metszi (esetleg a végtelenben, azaz ideális pontban) a mozgó egyenest, térbeli mozgást végző egyenes esetében e és v_e kitérő vagy metsző.

Tétel. (Egyenlő sebesség-összetevők tétele). Egy mozgó egyenes pontjainak az egyenesre eső sebesség-összetevői egyenlők (1. ábra).

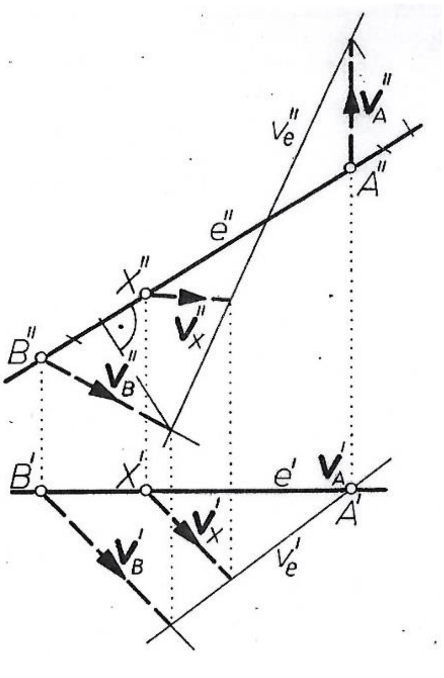
Tétel. Egy mozgó egyenes P, P_2P_3 pontjai, s az e pontokhoz tartozó $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ sebességvektorok $V_1V_2V_3$ végpontjai által alkotott ponthármasok osztóviszonya egyenlő: $[P_1P_2P_3] = [V_1V_2V_3]$.
Később igazoljuk, hogy egy mozgó egyenes pontjainak sebességvektorai egy síkkal párhuzamosak.
Megjegyzés.
A sebességvektorokat rajztechnikai okból középtájon elhelyezett nyíllal és szaggatott vonallal jelöljük, többnyire. Ha csak a sebesség irányát kívánjuk jelezni, akkor a nyíl a jelkép végén szerepel.

Ha egy *P* pont egy *O* középpontú *R* sugarú körön mozog a P_0 kezdőhelyzetből indulva (2. ábra), akkor a pont mozgását meghatározza a P_0 és *P* pontokhoz tartozó körsugarak időben változó hajlásszöge, pontosabban a $\varphi = \varphi(t)$ függvény.
Az *OP* egyenes forgó mozgását, azaz a φ szög időbeli változását az *OP* sugár (skaláris) szögsebessége, a $\varphi = \varphi(t)$ függvény idő szerinti deriváltja jellemzi:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \dot{\varphi}(t) \ .$$

A képlet egy síkban tetszőleges mozgást végző egyenes szögsebességét is értelmezi.
A *P* pont helyzetét a körön jellemző *s* előjeles ívhossz $s = R\varphi$ idő szerinti deriváltja, a pont pályasebessége, a $v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$ adja meg. Ha **e** a pozitív irányba mutató érintő egységvektor, akkor $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$.

PÉLDA (A továbbiakban az adott, ill. keresett elemeket A:, ill. K: rövidítések után soroljuk fel. A képsíkokat K_1, K_2, K_3 jelöli).
A: *e* egyenes *A* pontjának K_1 -re merőleges $\mathbf{v}_A$ sebessége, továbbá *B* pontja sebességvektorának állása (a vektor egyenese, 3. ábra).
K: - az *e* egyenes v_e sebességvonala,
- $\mathbf{v}_B$,
- az *e* egyenes tetszőleges *X* pontjának sebessége.
Megoldás.
$\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{v}_B$ *e* -vel párhuzamos összetevői egyenlők, ezért $\mathbf{v}_A$ - nak *e*-vel párhuzamos összetevőjét *B* -ből *e* -re felmérve és a felmért vektor végpontjában *e* -re merőleges síkot állítva $\mathbf{v}_B$ adott egyenese a merőleges síkot a keresett $\mathbf{v}_B$ végpontjában metszi.
$\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{v}_B$ végpontjait összekötve kapjuk a v_e sebességvonalat. Az *X* pont sebességvektorát szerkeszthetnénk az *e* -vel párhuzamos sebesség-összetevők tétele alapján is, de egyszerűbben is eljárhatunk: mivel egy egyenes pontjainak sebességvektorai egy síkkal párhuzamosak egy adott pillanatban, s esetünkben ez a sík $\mathbf{v}_B$ első vetítősíkja, az *X* pont sebességének első képe párhuzamos $\mathbf{v}_B$ első képével, második képe végpontjának fölvetítésével adódik.

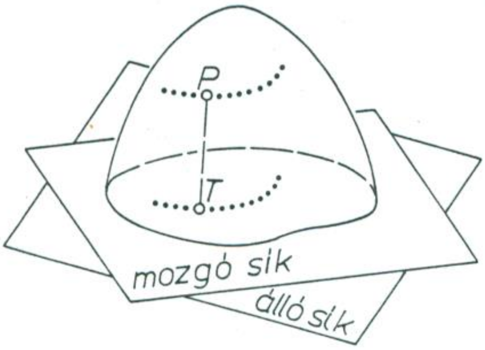


3. ábra

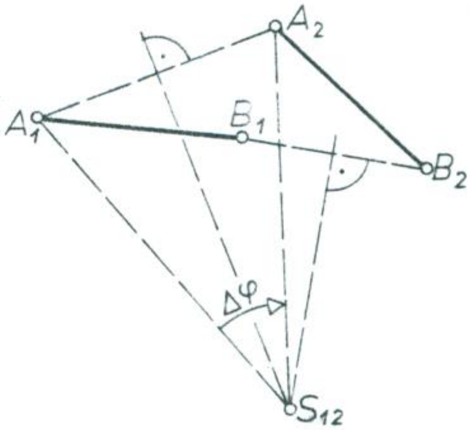
A mozgásjellemzők közül a gyorsulásvektorral nem foglalkozunk, noha ábrázoló geometriai alkalmazhatóság szempontjából előnyös lenne, de emlékeztetünk: a jelen összeállítás célja csak a kinematika által nyújtott bizonyos lehetőségek bemutatása.

SÍKMOZGÁS

Ha egy síkbeli alakzat – például egy síkidom – úgy mozog, hogy pontjai állandóan egy adott síkon maradnak, a síkbeli alakzat síkmozgást végez. A mozgó alakzat síkja a mozgó sík, a vele egybeeső adott sík a nyugvónak tekinthető álló sík. Ha a mozgó síkhoz rögzítünk egy testet, akkor a mozgó sík mozgatásával egyidejűleg a test is síkmozgást végez, minden pontjának mozgása olyan, mint a mozgó síkra vonatkozó *T* vetületének, talppontjának mozgása az álló síkon (4. ábra).



4. ábra

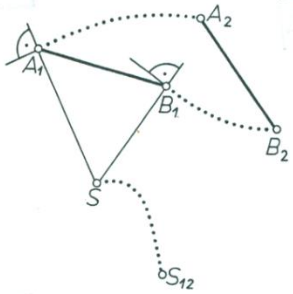


5. ábra

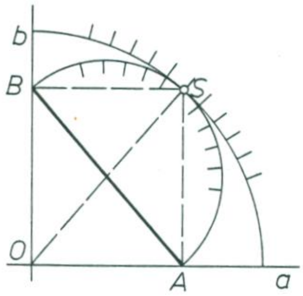
Ezért – egyszerűség kedvéért – a test mozgása helyett elegendő a síkbeli alakzat mozgásával foglalkozni. Mivel a mozgó sík mindenkori helyzetét meghatározza egy szakaszának helyzete, végeredményben a test mozgásának vizsgálata vissza vezethető egy szakasz síkmozgásáéra.

MOMENTÁN CENTRUM, PÓLUSGÖRBÉK

Egy síkban mozgó *AB* szakasz t_1 időpontban legyen az A_1B_1 helyzetben, t_2 időpontban pedig az A_2B_2 helyzetben (5. ábra).
E két helyzethez mindig található a síknak egy olyan – esetleg ideális, azaz végtelen távoli – S_{12} pontja, mely körül az A_1B_1 szakasz az A_2B_2 -be forgatható, ill. megfordítva.
Az ábráról leolvasható módon szerkeszthető S_{12} pont a mozgó síknak a t_1,t_2 helyzethez tartozó forgáspólusa. Ha rögzített t_1 - nél $\Delta t = t_2 - t_1$ tart a nullához, a mozgás folyamatosságát föltételezve, a távolságfelezők tartanak a szakaszvégpontok pályáinak A_1 ill. B_1 -beli normálisaihoz, a forgáspólusokból álló pontsorozat pedig egy *S* határponthoz. Az $S \equiv \lim S_{12}$ pont – ha létezik – a t_1 időponthoz tartozó pillanatnyi forgásközéppont vagy momentán centrum (6. ábra).

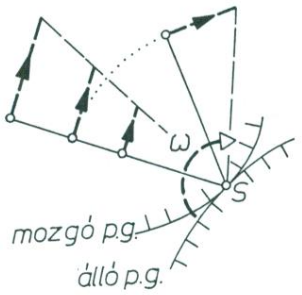


6. ábra

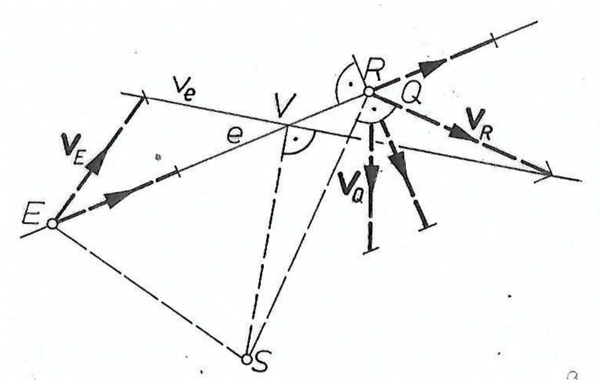


7. ábra

Ha a mozgás során minden pillanatban kijelöljük a momentán centrumot a mozgó és az álló síkon, akkor általában két különböző görbét alkotnak a kijelölt pontok, noha a megjelölés pillanatában fedésben vannak természetesen.
Az álló síkon kijelölt momentán centrum-sorozat az álló pólusgörbét, a mozgó síkon kijelölt momentán centrumok a mozgó pólusgörbét alkotják. Ha egy *AB* szakasz végpontjai az egymásra merőleges *a* , *b* egyeneseken mozognak, akkor a 7. ábrán látható helyzethez tartozó momentán centrum *S*, az álló pólusgörbe az $R = AB$ sugarú negyedkörív, a mozgó pólusgörbe az *AB* átmérőjű félkörív.
Visszatérve az 5. ábrához, mely föltünteti az S_{12} forgáspólus körüli elforgatás $\Delta\varphi$ szögét, képezzük a $\Delta\varphi/\Delta t$ hányadost, ahol Δt a két helyzethez tartozó időkülönbség, a hányados az elforgatáshoz tartozó átlagos szögsebesség. Ha $\Delta t \rightarrow 0$, a $\lim \Delta\varphi/\Delta t$ az *S* momentán centrumhoz tartozó pillanatnyi szögsebesség. Ha a mozgást nem csupán geometriai szempontból, hanem az időben lejátszódó folyamatként tekintjük, akkor a következőket állapíthatjuk meg:
- a mozgás pillanatról pillanatra változó momentán centrumok körüli elemi forgások sorozata,
- a momentán centrumokhoz tartozó pillanatnyi szögsebességek is pillanatról pillanatra változhatnak,
- a mozgó alakzat bármely pontjának sebességvektora merőleges az adott pontot a momentán centrummal összekötő pólussugárra,
- a momentán centrumtól egyenlő távolságra lévő pontok sebességvektorainak nagysága megegyezik és egyenlő a távolság és a pillanatnyi szögsebesség szorzatával (8. ábra).



8. ábra



9. ábra

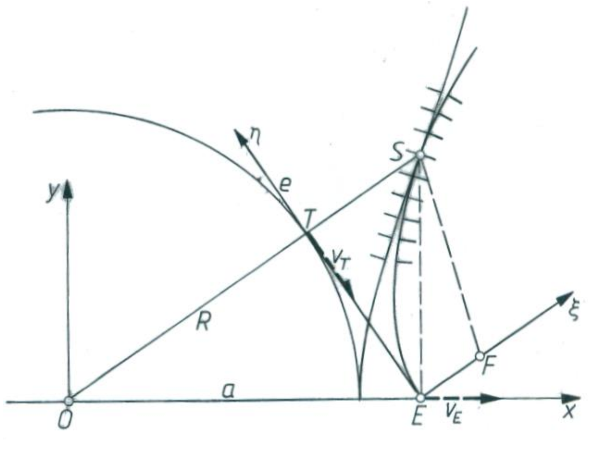
A fentiek alapján indokolt a momentán centrum – kinematikailag többet mondó – másik elnevezése, a sebességpólus.
Az elemi forgások egymásutánjából álló síkmozgás egyben gördülő mozgás is: a mozgó pólusgörbének az álló pólusgörbén való legördülése révén megvalósuló folyamat. Megmutatható, hogy adott síkmozgáshoz egyetlen, egyértelműen meghatározott pólusgörbe-pár tartozik. A síkmozgás azonban csak az elmozdulások és sebességek szempontjából tekinthető pillanatnyi forgások sorozatának, a gyorsulások tekintetében nem!

A SEBESSÉGPÓLUS MEGHATÁROZÁSA

A sebességpólus szerkesztéssel történő meghatározásának leggyakoribb esete az, amikor ismert a síkmozgást végző alakzat két pontjának pillanatnyi mozgásiránya (vagy csupán sebességvektorának állása). Ilyenkor a két pontban a megfelelő irányokra állított merőleges egyenesek, vagyis a pólussugarak metszéspontja a keresett sebességpólus. Ha a két pont sebességvektorai párhuzamosak egymással, akkor a vektorok kezdő- és végpontjainak összekötő egyenesei metszik egymást a sebességpólusban.

A sebességpólus meghatározásának különleges, és a későbbiek szempontjából fontos esete a következő: ismeretes egy *e* egyenes *E* pontjának $\mathbf{v}_E$ sebessége, továbbá egy olyan *Q* pont $\mathbf{v}_Q$ sebessége, mely pont nem tartozik az *e* egyeneshez, de amelyhez *e* a mozgás során illeszkedik. Meghatározandó az egyenes pillanatnyi mozgásának sebességpólusa (9. ábra).
Az *S* sebességpólust az ismert sebességű *E* pontban $\mathbf{v}_E$ -re állított merőleges és egy, a *Q* ponttal pillanatnyilag egybeeső, de *e* -hez tartozó *R* pont sebességére állított merőleges metszéspontja szolgáltatja.
Az *R* pont *e* -vel azonos állású összetevője egyenlő $\mathbf{v}_E$ megfelelő összetevőjével, *e* -re merőleges összetevője pedig – a *Q* pont és *e* illeszkedési feltétele alapján – egyenlő $\mathbf{v}_Q$ -nak *e* -re merőleges összetevőjével. Az *e* egyenes legkisebb sebességű pontjának vektor-végpontja a *V* pont.

PÉLDA
Meghatározandók azon *e* félegyenes mozgásának pólusgörbéi, mely mozgása során egy adott kört érint és kezdőpontja a kör egy adott átmérő egyenesén mozog (10. ábra).
Megoldás.
Az *R* sugarú kört érintő *e* félegyenes kezdőpontja sebességvektorának állása azonos az átmérő *a* egyenesének állásával. A kör és az *e* egyenes *T* érintkezési pontjának sebessége az érintésponthoz tartozó érintővel egy állású, vagyis egybeesik *e* -vel. Az *E* és *T* pontbeli sebességek állásának ismeretében az *S* sebességpólus már szerkeszthető.



10. ábra

A sebességpólus koordinátái közötti kapcsolat az álló *x* , *y* koordináta-rendszerben

$$\frac{R}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{, amelyből az álló pólusgörbe egyenlete: } y = \frac{x\sqrt{x^2-R^2}}{R}\,.$$

Hasonló módon a mozgó ξ , η koordináta-rendszerben:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{R}{\eta}\text{, amelyből a mozgó pólusgörbe egyenlete } \eta = \sqrt{R\xi}\,.$$

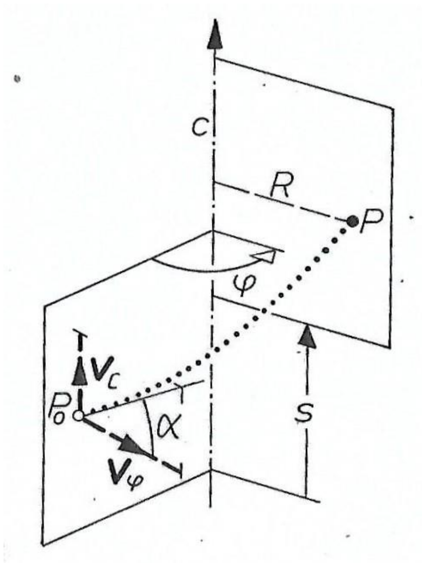
A mozgó pólusgörbe olyan parabola, melynek tengelypontja azonos a ξ,η koordináta-rendszer kezdőpontjával és paramétere *R/2*. Ennek ismeretében kijelölhető a parabola *F* fókusza, s ennek birtokában az *S* - beli érintő. Az ábra szemlélteti a két pólusgörbét is, melyek érintkeznek *S* -ben.
A síkmozgás egyik különleges esetében az álló és a mozgó síknak van közös pontja, ekkor forgó mozgásról van szó, másik esetben a mozgó sík egyenesei párhuzamosak maradnak az álló síkban lévő egyenesekkel, ekkor a síkmozgás transzláció (haladó mozgás).

CSAVARMOZGÁS

Mivel egy alakzat elmozdulása a térben eltolás, elforgatás vagy csavarmozgás, és mivel az utóbbi mozgástípusnak a következőkben lényeges szerepe lesz, az alábbiakban összefoglaljuk a csavarmozgás geometriájával és kinematikájával kapcsolatos fontosabb fogalmakat.

PONT CSAVARMOZGÁSA

Egy P pont csavarmozgást végez valamely c tengely (irányított egyenes) körül, ha a c határegyenesű és P -t tartalmazó félsík a c tengely körül forog és egyidejűleg eltolódik c mentén (11. ábra).



11. ábra

Közönséges csavarmozgást végez a pont, ha az eltolódás s mértéke arányos a forgás φ mértékével, azaz $s = p.\varphi$, ahol a p pozitív állandó a csavarmozgás paramétere, a $\varphi=1$ radián, (+ vagy – előjelű) szög-elforduláshoz tartozó forgási komponense, az s eltolódás pedig a transzlációs komponens.

A térben és időben végbemenő csavarmozgás (a következőkben mindig közönséges csavar-mozgás értendő) kinematikai jellemzéséhez szükséges megadni a csavarmozgás valamelyik komponensét is az idő függvényében. Ha a csavartengely körüli elfordulás egyenletes, azaz állandó szögsebességű, tehát $\varphi = \omega.t$, akkor a csavartengelytől R távolságra lévő pont sebességét az ω szögsebességű keringő mozgás $R\dot{\varphi} = R\omega = v_\varphi$ és a tengely irányú mozgás $\dot{s} = p\dot{\varphi} = p\omega = v_c$ komponensek vektoriális összege adja. A csavarmozgást végző pont pályája a csavarvonal. Jobbmenetű a csavarvonal, ha a transzlációs komponens előjelével egyezik a forgási komponensé is, vagyis mindkettő pozitív; ilyen a 11. ábrán látható pályagörbe, melynél most

$$tg\alpha = \frac{v_c}{v_\varphi} = \frac{p\omega}{R\omega} = \frac{p}{R} \ .$$

Balmenetű a csavarvonal, ha a forgási komponens negatív előjelű. A csavarvonal jellege nem függ tengelyének irányítottságától.

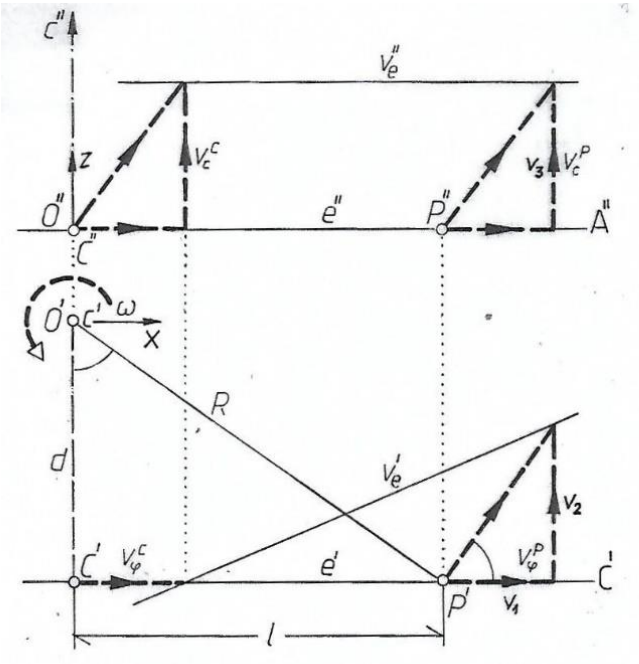
EGYENES CSAVARMOZGÁSA

A következőkben az egyeneseknek olyan csavarmozgását vizsgáljuk, melyek során a csavar-tengely merőleges az adott egyenesre. Legyen a csavarmozgás tengelye c, paramétere p, szög-sebessége ω, a különleges helyzetben ábrázolt e egyenes távolsága a tengelytől d (12. ábra).

Az *e* egyenes sebességviszonyainak tisztázása végett határozzuk meg két pontjának sebessé-égét. Az egyik pont legyen *e*-nek a tengelyhez legközelebbi pontja, a *C* pont, melynek két se-besség-komponense $v_\varphi^C = d\omega, \;\; v_c^C = p\omega$. Az *e* egyenes egy további pontja legyen a *C* ponttól *l* távolságra lévő *P*. A *P* pont sebesség-komponensei $v_c^P = v_c^C = p\omega$. A másik komponens

$$v_\varphi^P = R\omega = \sqrt{d^2 + l^2}\,\omega.$$

Az *e* egyenes bármely két pontjának távolsága egyenlő egymással, az x, ill. z irányú sebesség- - komponensek egyenlősége miatt, ezért az eredő sebességek második képei párhuzamosak egymással; térben ez vektoraik azonos síkkal való párhuzamosságát jelenti.



12. ábra

A továbbiakban hasznosnak bizonyul a sebességvektoroknak az imént látott különleges föl-bontása, melyhez bevezetjük a következő fogalmakat és jelöléseket: az egyenest tartalmazó és az egyenes v_e sebességvonalával párhuzamos sík az egyenes A aszimptota-síkja, mely ese-tünkben *e* második vetítősíkja egyben. Az egyenest tartalmazó és annak aszimptota-síkjára merőleges sík az egyenes C centrális síkja, mely most azonos *e* első vetítősíkjával. Az elnevezések a későbbiekben válnak indokolttá.

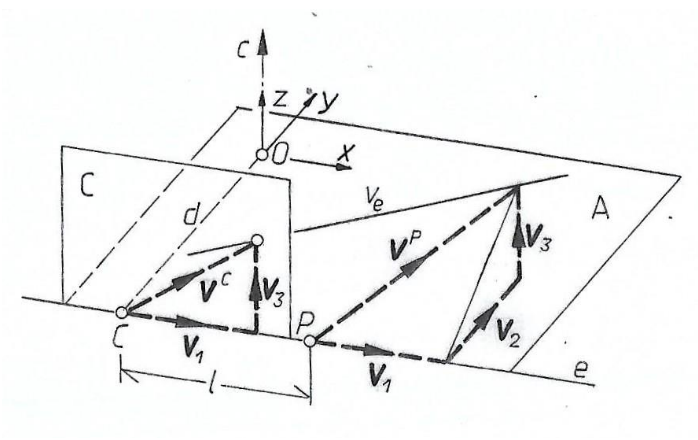
Az *e* egyenes sebességvektorainak alap-felbontása a 13. szemléletes ábra szerint a következőt jelenti: a vektorokat *e*-vel azonos állású $\mathbf{v}_1$, a C síkra merőleges $\mathbf{v}_2$ és az A síkra merőleges $\mathbf{v}_3$ összetevőre bontjuk.

Részletesen:

$\mathbf{v}_1^C = \mathbf{v}_1^P$: a sebességvektorok *e* állású összetevői,

$\mathbf{v}_2^C = \mathbf{o} \neq \mathbf{v}_2^P$: „ C-re merőleges összetevői,

$\mathbf{v}_3^C = \mathbf{v}_3^P$: „ A-ra „ „ .



13. ábra

A korábbiakból következik, hogy csupán a középső összetevő pár különbözik egymástól. Az *e* egyenes azon *C* pontja, melyre $\mathbf{v}_2^C = \mathbf{o}$ az egyenes centrális pontja, sebessége a C síkba esik.

A CSAVARMOZGÁS-PROBLÉMA

Ha egy adott pillanatban ismeretes egy térben mozgó egyenes sebességállapota, tehát pl. ismeretes két pontjának sebessége, kérdezhetjük, hogy melyek azok a csavarmozgások, melyek az egyenes adott pontjaihoz az adott sebességeket rendelik, vagyis a két adott sebesség által meghatározott sebességállapotot hozzák létre. Az imént feltett kérdés a csavarmozgás-probléma megfogalmazása, melynek megoldása az alábbiak meghatározását jelenti:
- a csavartengely térbeli helyzete,
- a csavarmozgás *p* paramétere,
- a csavarmozgás ω szögsebessége.

A feladatnak azzal a – fentiekben is látott – esetével foglalkozunk, amikor a csavartengely merőleges az aszimptota-síkra. Ezt a kitüntetett csavarmozgást tekinthetjük a továbbiakban normál-csavarmozgásnak.
Mivel két sebességvektor esetén a vektor-végpontok összekötő egyenese, vagyis a sebességvonal ismeretes, a vele párhuzamos és az adott egyenest tartalmazó aszimptota-sík, majd ez utóbbira merőleges centrális sík is ismertnek tekinthető (13. ábra). E két sík már meghatározza a csavartengely állását, a centrális pont helyzetét. Ha az adott sebességek alapfelbontásából nyerhető v_1, v_2, v_3 komponensei valamilyen módon – számítással vagy szerkesztéssel – meghatározhatók, akkor a 12. ábra (körívvel jelölt) hasonló háromszögeiből

$$\frac{l}{d} = \frac{v_2}{v_1} \text{ és } v_1 = d\omega, \text{ ezekből } \omega = \frac{v_2}{l}, \quad d = \frac{v_1}{v_2} l, \quad p = \frac{v_3}{\omega}, \quad p = \frac{v_3}{v_2} l .$$

A 13. ábrán látható koordináta-rendszerben az *e* egyenes csavarmozgásának paramétere előjelhelyesen adódik az általános helyzetű *P* pont sebesség-komponenseinek és az $l = x$ koordinátának figyelembe vételével.
A későbbiekben találkozunk azzal az esettel, amikor a mozgó egyenes – egy felületet leíró alkotó – valamely *P* pontjához tartozó két sebesség-komponens egyenlő, következőleg ott $v_3/v_2 = 1$, ezért az alkotó paramétere egyenlő a *P* pontnak a centrális ponttól mért *d* távolságával (1. jelű irodalom 637.o.).
Szerkesztéssel is számos esetben megoldhatók a csavarmozgással kapcsolatos feladatok; ilyenkor segítséget jelenthet, ha a csavarmozgást végző alakzatnak a csavarmozgás tengelyére merőleges vetületi mozgását síkmozgásként vizsgáljuk.
A fentiekre példát a felületek ábrázolásával foglalkozó részben találunk.

RELATÍV MOZGÁS

A mozgást mindig valamilyen meghatározott alakzathoz, ill. koordináta-rendszerhez viszonyítjuk, vonatkoztatási rendszer hiányában a mozgásról semmi nem mondható.
Egy mozgó pont pályája, sebessége, gyorsulása más és más lehet aszerint, hogy milyen koordináta-rendszerben vizsgáljuk a mozgást. A következőkben azt állapítjuk meg, hogy mi a kapcsolat két különböző vonatkoztatási rendszerben érvényes sebességek között.
Ha az egyik rendszert abszolút, a másik rendszert szállító (koordináta-) rendszernek nevezzük, akkor beszélhetünk a két rendszerhez viszonyított pályáról, sebességről (gyorsulásról) is.
Hogy melyik rendszert tekintsük abszolút, ill. szállító rendszernek, azt adott esetben kinematikai, geometriai megfontolás alapján döntjük el.

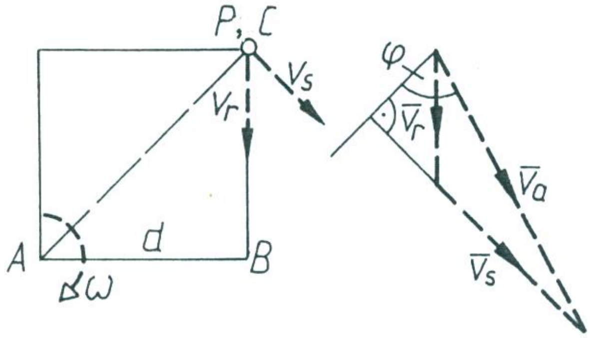
KAPCSOLAT A SEBESSÉGEK KÖZÖTT

Bevezetjük a következő fogalmakat és jelöléseket:
$\mathbf{v}^a$: abszolút sebesség, a pont sebessége az abszolút rendszerben,
$\mathbf{v}^r$: relatív sebesség, a pont sebessége a szállító rendszerben,
$\mathbf{v}^s$: szállító sebesség, a szállító rendszerhez tartozó, vele együtt mozgó azon pont sebessége, mely pillanatnyilag egybeesik a mozgó ponttal.
A fenti jelölésekkel a három sebességfajta közti kapcsolat:

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^r + \mathbf{v}^s \,.$$

PÉLDA

Egy *d* oldalhosszúságú négyzet az *A* csúcsa körül ω szögsebességgel forogva egy teljes fordulatot tesz meg, mialatt a *C* csúcsból induló *P* pont állandó *v* sebességgel haladva, a négyzet oldalán *C*-ből *B* - be jut (14. ábra).



14. ábra

A: *d* , ω.
K: *P* abszolút sebessége az indulás pillanatában.

Megoldás.

A szállító rendszer most a négyzet, mely $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ idő alatt fordul körbe. A relatív sebesség nagysága, $v^r = \dfrac{d\omega}{2\pi}$, a szállító sebesség nagysága $v^s = \sqrt{2}\, d\omega$, a két sebesség irányát a 14. (nem mérethelyes) ábra szemlélteti. Az abszolút sebesség nagysága koszinusztétellel:

$$v^a = \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{8\pi^2 + 4\pi + 1}\,.$$

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI ALKALMAZÁSOK

VETÜLETI MOZGÁS

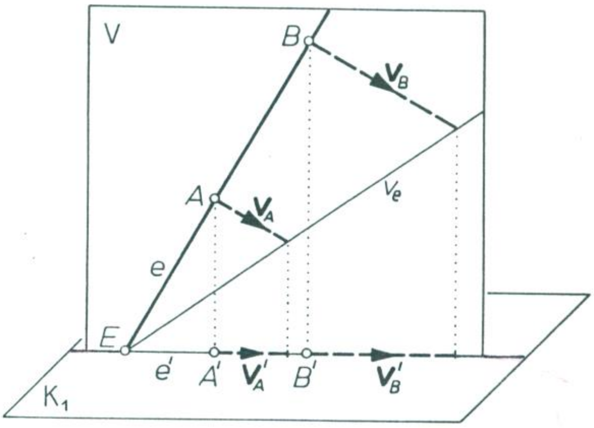
Mielőtt rátérnénk a kinematikai eszközöknek ábrázoló- és konstruktív differenciálgeometriai alkalmazására, szükséges néhány fogalmat és tényt ismertetni a vetületi mozgások sajátos kinematikai viszonyaival kapcsolatban.

PONT VETÜLETI MOZGÁSA

Egy térben mozgó pontot a képsíkra vetítve, vizsgálhatjuk a vetületi pont mozgását. A továbbiakban csak merőleges vetületekkel foglalkozunk, megjegyezve azonban, hogy nehezebb, érdekesebb kérdések centrális vetületekkel kapcsolatban merülnek föl.
A térben mozgó pont vetülete is mozog általában, kivéve azt az esetet, amikor a térbeli pont vetítősugáron mozog.

EGYENES VETÜLETI MOZGÁSA

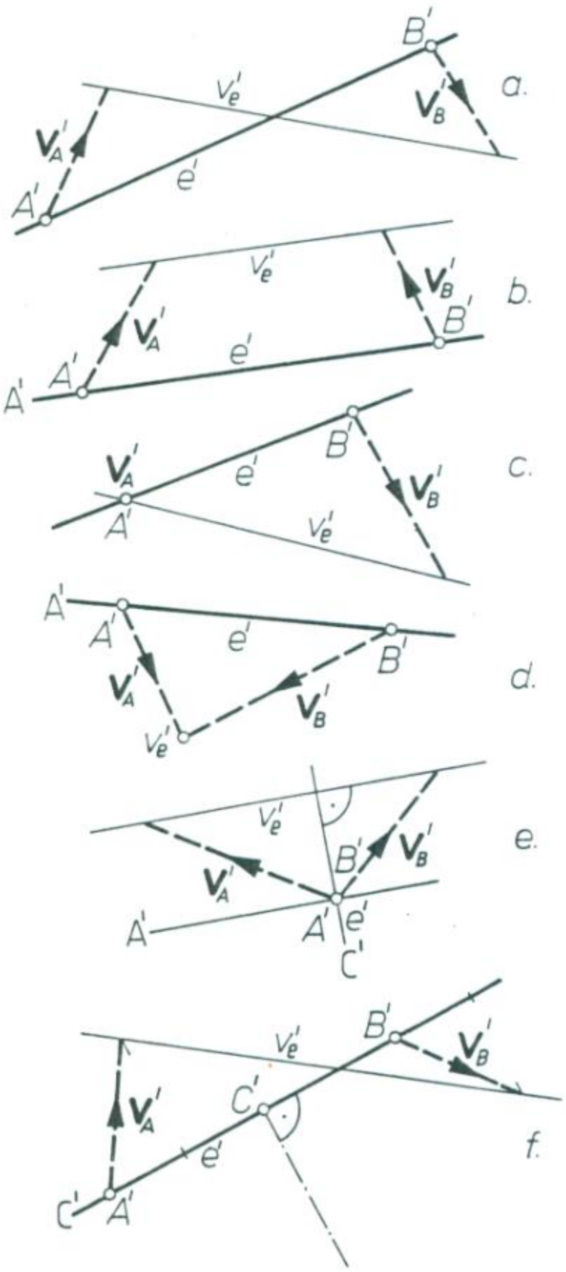
Néhány előzetes észrevétel az egyenes vetületi mozgásával kapcsolatban:
1. A térben mozgó egyenes vetülete is mozog általában, kivételt jelent azon eset, amikor az egyenes álló vetítősíkjában mozog.
2. Meg kell különböztetni a vetület egyenest, mint vonal alakzatot a vetület egyenestől, mint pontokból álló alakzattól. Ugyanis a vetület egyenes nem „merev” olyan értelemben, hogy míg egy e egyenes A és B pontjának egymástól mért távolsága az egyenes mozgása közben változatlan, addig a vetület egyenes említett két pontjának $A'B'$ távolsága még abban az esetben is változhat, mikor az egyenes e' vetülete – mint vonal-alakzat – nem mozog. Nyilvánvaló hogy például egy vetítősíkjában nyompontja körül forgó egyenes vetülete mozdulatlan, miközben két pontjainak vetülete különböző sebességgel mozog (15. ábra)



15. ábra

3. A vetület egyenes mozgása a síkon háromféle lehet: transzláció, forgás egy pont körül, síkmozgás.
A térben mozgó egyenes sebességvonalának vetülete is egyenes, kivétel az az eset, mikor a sebességvonal merőleges a képsíkra. Egy térmozgást végző e egyenes AB szakaszának és v_e sebességvonalának vetületét szemlélteti a 16. ábra, feltéve, hogy az egyenes és sebességvonala kitérő.
a. e és v_e a képsíkhoz képest általános helyzetű.
b. e' és v_e' párhuzamos egymással és az A aszimptota sík e vetítősíkja.
c. $\mathbf{v}_A$ merőleges a képsíkra.
d. v_e merőleges a képsíkra, az aszimptota-sík e vetítősíkja.
e. az e egyenes, valamint az aszimptota-sík és a C centrális sík merőleges a képsíkra.
f. e, v_e párhuzamos a képsíkkal. Az A aszimptota-sík párhuzamos a képsíkkal, a C centrális sík

az egyenes vetítősíkja. Kijelölhető a C centrális pont vetülete is a sebességvektorok e-vel párhuzamos összetevőinek ismeretében.

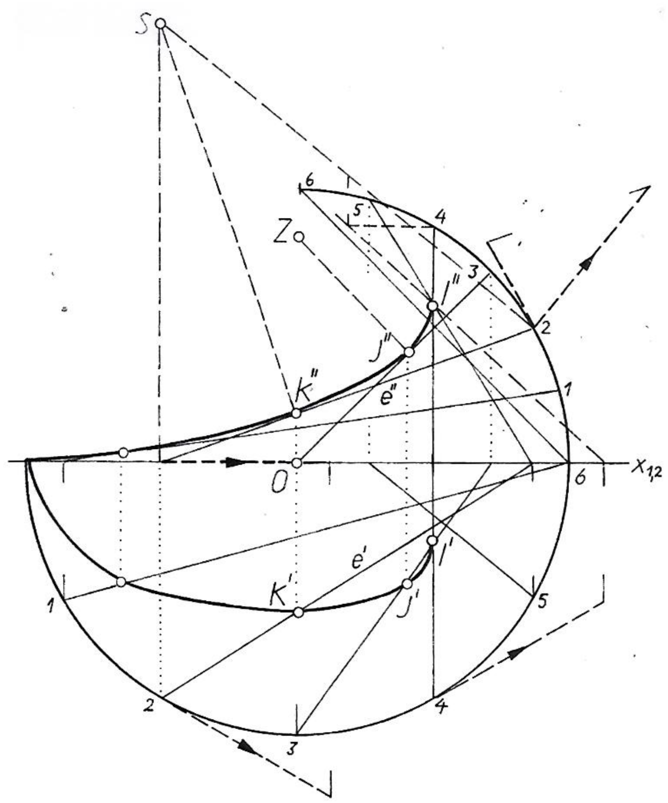


16. ábra

Az a körülmény, hogy a pontok, egyenesek, stb. vetületeit mozgatható alakzatokként is tekinthetjük, olykor bővítheti az ábrázoló geometria hagyományos eszköztárát; ezt szemlélteti az alábbi példa.

Legyen a vonalfelület két mozgó pontot összekötő egyeneseiből mint alkotókból álló alakzat. A félkörön mozgó pont helyzeteire A_i, a negyedkörön mozgó, megfelelő pont helyzeteire B_i -

ként hivatkozunk a továbbiakban, de csupán számok jelölik e helyzeteket. Az egyik pont egy R sugarú, K_1-ben lévő félkört futja be, v sebességgel.
Az ugyancsak R sugarú, K_2 - ben lévő negyedkört a másik pont futja be, $v/2$ sebességgel oly módon, hogy a két mozgó pont mindig azonos sorszámú pontja a megfelelő körnek (17. ábra).



17. ábra

Feladatunk a két mozgó pont összekötő egyenesei által alkotott felület második kontúrgörbéjének szerkesztése, pontosabban: két alkotójának azon pontját megszerkeszteni, melyhez 2. képsíkra merőleges érintősík tartozik.
A 2-2 ponthelyzeteket összekötő, e alkotó azon pontja keresendő, melynek sebessége az alkotóval K_2-re merőleges síkot határoz meg. Ez esetben a sebességvektor vetülete az alkotó képével egybeesik; ha az alkotó második képét mozgásában tekintjük, a keresett pont 2. képe a mozgó vetület sebességpólusának talppontja.
Tekintsük az alkotó 2. képét olyan egyenesnek, melynek sebessége az A_2 alkotó nyompontsebességének 2. képe, s mely egyenes „támaszkodik” a v_B sebességgel mozgó B_2 pontra. E ponttal egybeeső, de az e'' egyeneshez tartozó pont sebességvektora a már ismert módon megszerkeszthető, vagyis ismertté vált az e'' egyenes két pontjának sebessége, így a képegyenes S sebességpólusa az ábra szerint ismertté vált, K'' talppontja a kontúrpont második képe. Hasonló módon eljárva kapnánk 3-3 pontpárhoz tartozó alkotó második képének Z sebességpólusát és a J'' kontúrpontot.
Kissé módosult gondolatmenettel kapható a kontúrgörbe végső I pontja, mert a 4-4 jelű alkotó után következő alkotók képhatár-pontjai nem kontúrpontok.
Nem érintettük a felülettel kapcsolatos láthatósági kérdéseket, melyek ez esetben érdekesek.
A 4-4 jelű alkotók utáni felületi alkotókon is találhatók olyan pontok, melyekhez K_2 - re merőleges érintősík tartozik, de ezek részben fedésben vannak.

SÍK VETÜLETI MOZGÁSA

A sík vetületi mozgásának a jelen összeállításban nincs lényeges szerepe, ezért csak egy

tételt említünk meg, mely a síkban mozgó egyenes vetületével kapcsolatos.
Tétel: Ha egy ε képsíkszögű síkban mozgó egyenes szögsebessége ω, s az egyenesnek a sík nyomvonalával bezárt hajlásszöge φ, akkor a vetület-egyenes pillanatnyi szögsebessége:

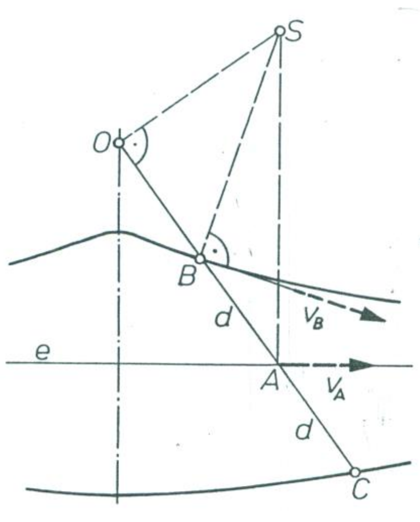
$$\omega' = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\varphi + \cos^2\varepsilon . \sin^2\varphi}\omega .$$

SÍKGÖRBE ÉRINTŐSZERKESZTÉSE

Ha egy sík- vagy térgörbe származtatható kinematikai úton, akkor a görbe érintőjének szerkesztése sebességvektor-meghatározásra vezethető vissza: a görbét leíró pont sebességvektora azonos állású a görbe érintőjével; ha tehát a sebességvektort meg tudjuk határozni, akkor az érintőszerkesztés feladata is elintézettnek tekinthető. A kinematikai alapon történő érintő-meghatározásra többféle módszer alkalmazható.

ÉRINTŐSZERKESZTÉS A SEBESSÉGPÓLUS ISMERETÉBEN
Ha a görbét egy síkmozgást végző alakzat – például egy egyenes – valamely pontja írja le, akkor az érintő meghatározása a következő lépésekben történhet:
- előállítjuk a származtató alakzat mozgásának sebességpólusát,
- meghatározzuk a leíró pont sebességvektorát a sebességpólus ismeretében,
- a leíró ponton átmenő, s a sebességvektorral azonos állású egyenes a keresett érintő,
- ha lehetséges, egyszerűsítjük a szerkesztést oly módon, hogy elhagyjuk a kinematikai „beöltöztetést”, vagyis a kinematikailag indokolt, de az érintő előállítása szempontjából mellőzhető vonalakat nem rajzoljuk meg.

A fentieket a konchois (pontosabban az egyenes konchoisának) példáján szemléltetjük.
A konchois geometriai származtatása: egy *O* ponton átmenő és egy adott *e* egyenest valamely *A* pontban metsző egyenesre a metszéspontból egyenlő *d* távolságokat mérünk föl (mindkét lehetséges irányban). Ha *A* befutja az *e* egyenest, a felmérésekkel nyert szakaszvégpontok összessége alkotja a konchoist (18. ábra).



18. ábra

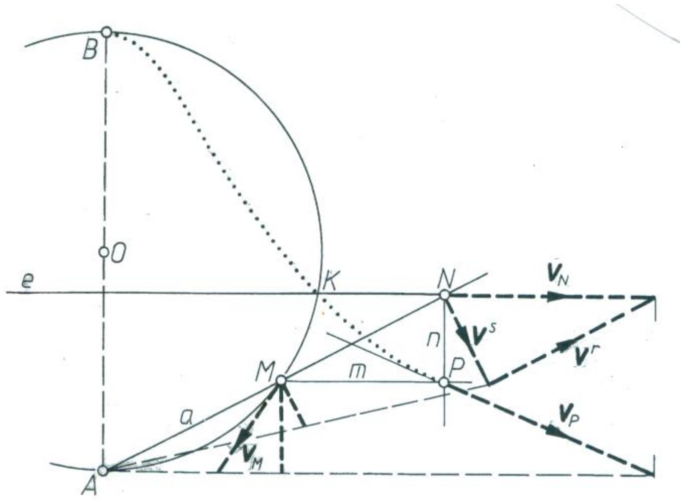
A görbe kinematikai származtatása: ha az *AB* szakasz úgy mozog, hogy
- az *A* végpont az *e* egyenesen haladjon,
- a szakasz egyenese illeszkedjék az *O* ponthoz,

akkor a szakasz *B* végpontja a konchois egyik ágát írja le, a másik ág előállítása hasonló.
Az iménti kinematikai származtatás birtokában a mozgó szakasz *S* sebességpólusa az ábra szerint megszerkeszthető, az *A* pont tetszőleges nagyságú $\mathbf{v}_A$ sebességét ismerve a *B* pont

sebessége is meghatározható, de csupán a geometriai feladat szempontjából ezekre a mozgásjellemzőkre nincs is szükség, a keresett érintő a *B* ponton átmenő és az *SB* egyenesre merőleges egyenes.

ÉRINTŐSZERKESZTÉS A RELATÍV MOZGÁS SEBESSÉGTÉTELE ALAPJÁN

A kinematikailag értelmezhető görbéknek sem mindegyike származtatható egy síkmozgást végző alakzat valamely pontjának pályagörbéjeként. Ilyen esetekben szükség lehet a relatív mozgással kapcsolatos tételek alkalmazására. Példaként vegyük a 19. ábrán látható görbét, melynek származtatása a következő: az *A* ponthoz illeszkedő *a* egyenes a *k* kört az *M* pontban, az *AB* átmérőre merőleges *e* egyenest *N* pontban metszi. E metszéspontokban az átmérőre, ill. *e*-re állított merőlegesek egymást *P* pontban metszik. Ha *M* befutja a kört, a *P* pont által leírt görbe (Schoute-féle görbe) *P*-beli érintője szerkesztendő.

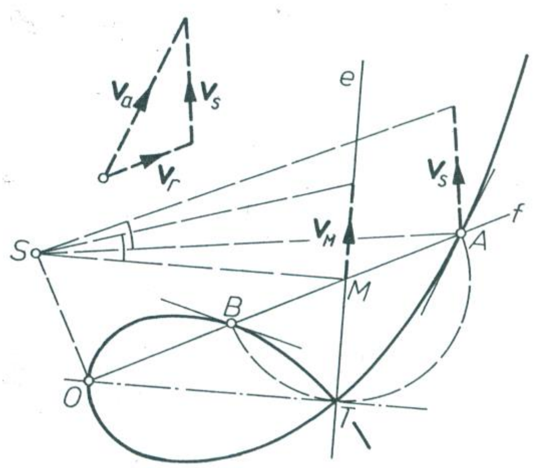


19. ábra

Megoldás.
A *P* pont az *M* és *N* pontokkal együtt mozgó *m* , *n* egyenesek közös pontja. Miközben az *a* egyenes az *A* pont körül forog, legyen *M* sebessége tetszőleges (de célszerűen az ábrán látható módon felvett) $\mathbf{v}_M$**.** Az *a* egyeneshez képest mozgó *M* , *N* pontok szállító sebessége merőleges *a*-ra, az *N* pont relatív sebessége párhuzamos *a*-val, ilyen módon $\mathbf{v}_N$, s egyben *P* sebességének egyik összetevője ismertté válik. Mivel az *m* egyenes minden pontjának „függőleges” sebesség-összetevője egyenlő és akkora, mint $\mathbf{v}_M$ megfelelő összetevője, ezért a *P* pont sebessége, s egyben a görbe *P*-beli érintője az ábra szerint megszerkeszthető.
Az ismertetett szerkesztés a görbe *K* pontjához tartozó érintő meghatározására is alkalmas.

ÉRINTŐSZERKESZTÉS VEGYES MÓDSZERREL

Olykor szükség lehet a síkmozgással kapcsolatos ismereteknek (sebességpólus) és a relatív mozgás sebességtételének együttes alkalmazására. Erre mutat példát a strophois görbe esete. A strophois származtatása: egy *e* egyenesen kívüli *O* ponton átmenő *f* egyenes *e*-t *M* pontban metszi. Legyen *O*-nak *e*-re vonatkozó talppontja *T* és mérjük fel az *f* egyenesre *M*-ből az *MT* távolságot mindkét lehetséges irányban. Ha *M* befutja az *e* egyenest, a felmérések eredményeképpen kapott pontok összessége alkotja a strophoist (20. ábra).



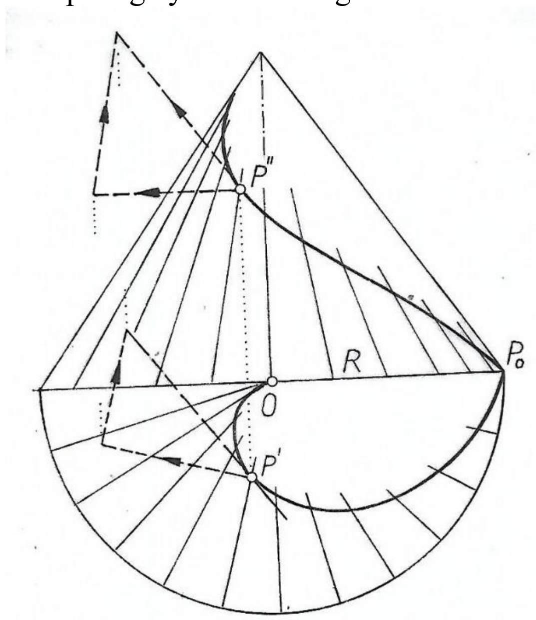
20. ábra

A görbe kinematikai származtatása: az *f* egyenes az *OT* kezdő helyzetből indulva mozogjon úgy, hogy
- *M* állandó sebességgel haladjon *e* - egyenesen,
- az *f* egyenesen mozgó $M \equiv T$ kezdő helyzetből induló *A* és *B* pont *f* -hez viszonyított állandó sebességére teljesüljön: $\mathbf{v}^r_A = -\mathbf{v}^r_B$.

Ilyen feltételek mellett *A* és *B* pályagörbéi alkotják a strophoist.
Az érintő szerkesztése az *A* pontban a következő: az *f* egyenes a szállító rendszer, az ehhez viszonyított sebesség az imént felírt két relatív sebesség. A szállító sebesség az *A* - val egybeeső, de *f* - hez tartozó pont sebessége, mely merőleges az *SA* pólussugárra. Az *S* sebességpólus meghatározása és $\mathbf{v}_S$ meghatározása leolvasható az ábráról. Megemlítjük, hogy további kinematikai megoldás adódik, ha *f* - et *O* körül forgó egyenesnek tekintjük.

TÉRGÖRBE ÉRINTŐSZERKESZTÉSE

Az érintő meghatározása a síkbeli érintő esetében látott módszerrel azonos: a térgörbe érintőjének állása és iránya egyezik a görbét leíró pont sebességvektoráéval. Az alábbi példában a térgörbe annak a pontnak a pályája, melyet egy kúp valamelyik alkotóján mozgó pont ír le, miközben a kúp alkotója forog (21. ábra).
Részletesebben: az alkotó *P* pontja állandó sebességgel halad a kúp csúcsa felé, miközben az az alkotó vetítő síkja a kúp tengelye körül forog.



21. ábra

A kúp alapkörének sugara $R = 6\ cm$, magassága $h = 8{,}5\ cm$, alkotóinak hossza $l \approx 10{,}4\ cm$.
Az a alkotó $\omega = \pi$ 1/sec szögsebességgel fordul el, a P_0 helyzetből induló pont $v = 10\ cm/s$ sebeséggel halad a kúp csúcsa felé.
Az alkotó 7. helyzetében a P_7-hez tartozó érintőt a relatív mozgás sebesség-tételével határozzuk meg. A szállító sebesség az alkotó vetítő síkjára merőleges, $v^s = 2{,}5.\pi \approx 7{,}8$, mely merőleges az alkotó első vetítő síkjára. A v^r relatív sebesség állása azonos az alkotó 7 jelű helyzetének állásával, nagysága $v^r = 10{,}4$; felmérése az alkotó második képsíkkal párhuzamos helyzetében célszerű. A két összetevő vektoriális összege megadja a P_7-beli érintőt.

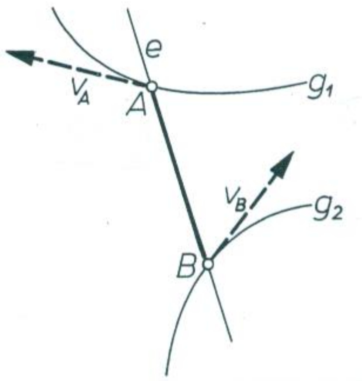
KINEMATIKAI FELÜLETEK

FELÜLETEK SZÁRMAZTATÁSA

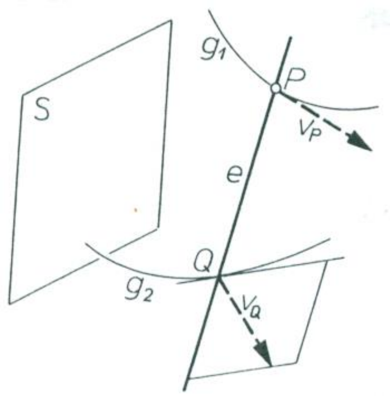
A következőkben ismertnek tételezzük fel a felületekkel kapcsolatos alapvető fogalmakat, mint például vonalfelület, kifejthető felület, torzfelület, bár ez utóbbival kapcsolatban megjegyezzük a nem egységes szóhasználat miatt, hogy – ellentétben egyes hazai geometriai művek szóhasználatával (ld.: 1) – itt a nem kifejthető vonalfelületeket értjük torzfelületeken.
Kinematikai módszerek elsősorban olyan felületekkel kapcsolatban alkalmazhatók, melyek valamely alakzat – általában egy egyenes vagy egy görbe mozgatásával származtathatók, vagyis a felület a mozgó alakzat helyzetei összességének tekinthető. Az ilyen felületeket nevezhetjük kinematikai felületeknek. A felületek számos fajtája tartozik ebbe a felülettípusba, a műszaki szempontból fontos felületek szinte mindegyike.
Egy felülethez különböző származtatási módok tartozhatnak. A felület származtatási módjának ismeretéhez ugyan elegendő annyi, hogy a mozgó alkotó tetszőleges helyzetét elő tudjuk állítani, de a kinematikai eszközök alkalmazásához az is szükséges, hogy az alkotó bármely pontjának mozgásjellemzőit – sebességét, esetleg szögsebességét, gyorsulását (ez utóbbival itt nem foglalkozunk) – meg tudjuk állapítani. Ha áttekintésünk van az alkotó tetszőleges pontjának sebességéről, azt mondjuk, hogy ismeretes az alkotó sebességállapota.

FELÜLETFAJTÁK

A kinematikai módszerek ábrázoló- és konstruktív differenciálgeometriai alkalmazhatóságának szemléltetése céljából néhány felületszármaztatási módot sorolunk föl, s a továbbiakban ezeken a típusokon mutatjuk be a kinematikai módszerek alkalmazását.
A legfontosabb alkalmazási lehetőséget a vonalfelületek nyújtják, ezért az alábbiakban felsorolunk néhány, a következőkben is előforduló vonalfelület fajtát.
I. Az e alkotó egy AB szakaszának két végpontja adott g_1, ill. g_2 görbén (ide értve az esetleges egyeneseket is) mozog (22. ábra).
Sebességállapot.
Az alkotó AB szakasza végpontjainak $\mathbf{v}_A$, ill. $\mathbf{v}_B$ sebessége a g_1, ill. g_2 görbék A, ill. B pontbeli érintőjével egyező állású, továbbá a sebességvektorok e-vel párhuzamos összetevői egyenlők.
Megjegyzés: a sebességállapotra vonatkozó megállapításból következik, hogy ha az alkotó AB szakasza úgy mozog, hogy egyik végpontjának pályáját az alkotó merőlegesen metszi, akkor az alkotó minden pontjának pályáját is merőlegesen metszi.



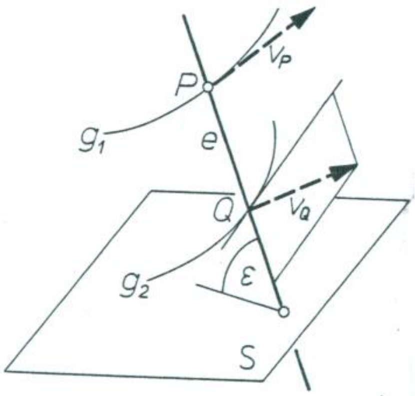
22. ábra



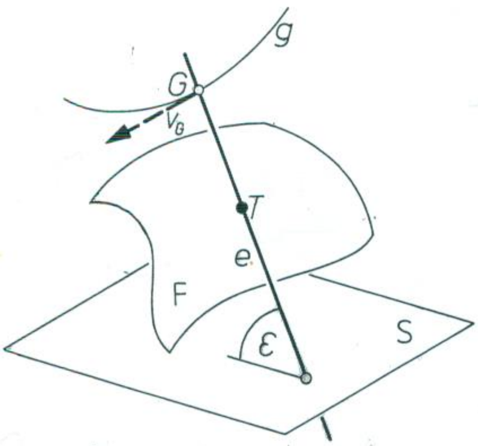
23. ábra

II. Az e alkotó mozgása közben adott g_1, g_2 görbéket metsz és párhuzamos egy S síkkal, az alkotó által leírt felület iránysíkjával (23. ábra).
Sebességállapot.
Ha az alkotó és g_1 P metszéspontja $\mathbf{v}_P$ sebességgel mozog g_1-en, akkor e-nek pillanatnyilag g_2 -re eső Q pontja olyan $\mathbf{v}_Q$ sebességű, hogy fennáll:
- $\mathbf{v}_P$ és $\mathbf{v}_Q$ e -vel párhuzamos összetevői egyenlők,
- $\mathbf{v}_Q$ benne van a g_2 Q -beli érintője és az alkotó által meghatározott síkban,
- $\mathbf{v}_P$ és $\mathbf{v}_Q$ S-re merőleges összetevői egyenlők.

III. Az e alkotó mozgása közben két adott g_1 és g_2 görbét metsz és állandó ε szöget zár be egy S síkkal (24. ábra).
Sebességállapot:
Ha az alkotó és g_1 görbe P metszéspontja $\mathbf{v}_P$ sebességgel mozog a görbén, akkor e pillanatnyilag g_2 - re eső Q pontjának sebessége a következő feltételekből nyerhető:
- $\mathbf{v}_P$ és $\mathbf{v}_Q$ e - vel párhuzamos összetevői egyenlők,
- $\mathbf{v}_Q$ benne van a g_2 görbe Q - beli érintője és az alkotó által meghatározott síkban,
- $\mathbf{v}_P$ és $\mathbf{v}_Q$ S-re merőleges összetevői egyenlők.



24. ábra

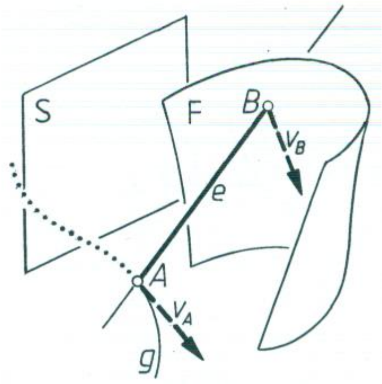


25. ábra

IV. Az e alkotó mozgása közben egy adott g görbét metsz, egy adott F felületet érint, és adott ε szöget zár be egy adott S síkkal (25. ábra).
Sebességállapot:

Ha az alkotó G pontja $\mathbf{v}_G$ sebességgel mozog a g görbén, akkor e -nek azon T pontjára, melyben az alkotó a felületet érinti, érvényes:
- $\mathbf{v}_G$ és $\mathbf{v}_T$ e - vel párhuzamos összetevői egyenlők,
- $\mathbf{v}_T$ benne van a felület T-beli érintősíkjában,
- $\mathbf{v}_G$ és $\mathbf{v}_T$ S-re merőleges összetevői egyenlők.

V. Az *e* alkotó úgy mozog, hogy egy *AB* szakaszának
- *A* pontja egy adott *g* görbén halad,
- *B* pontja egy adott F felületen marad,
- az alkotó mozgása közben párhuzamos egy adott S síkkal (26. ábra).



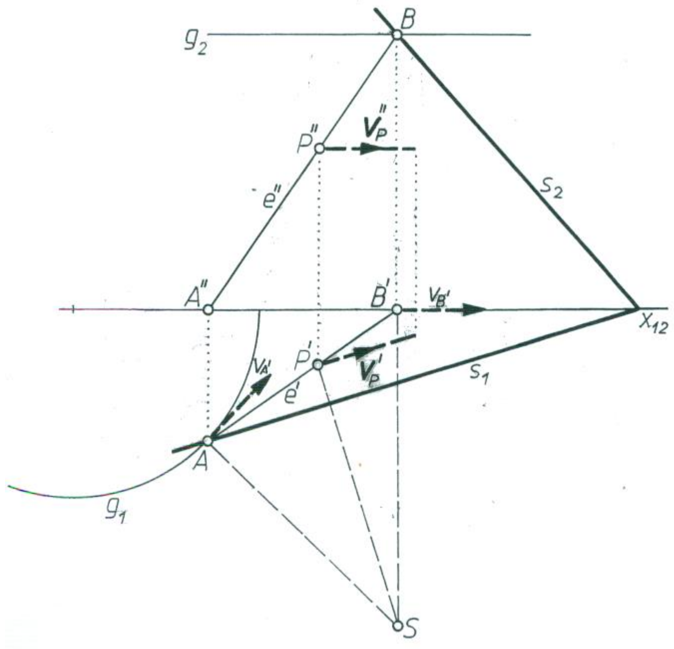
26. ábra

Sebességállapot:
- $\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{v}_B$ e-vel párhuzamos összetevői egyenlők,
- a két sebességvektor S-re merőleges összetevői is egyenlők,
- $\mathbf{v}_B$ az F felület *B*-beli érintősíkjába esik.

FELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA

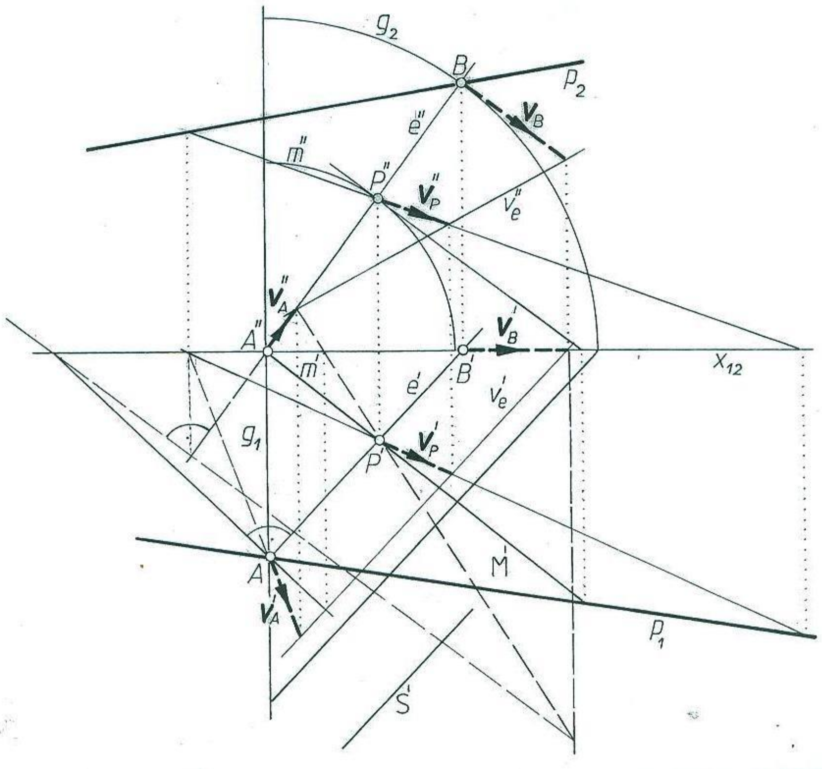
ÉRINTŐSÍK-SZERKESZTÉS

Felület egy pontjához tartozó érintősík megszerkesztése többnyire úgy történik, hogy a felületi pontot tartalmazó két felületi görbe érintőjét határozzuk meg, s az általuk kifeszített sík a keresett érintősík. Vonalfelület esetén az egyik görbe lehet maga a kijelölt felületi pontot tartalmazó alkotó. Kinematikai vonalfelület esetében más, és mindig alkalmazható módszer is követhető: az adott *P* felületi pontot tartalmazó alkotó, mely mozgása közben leírja a felületet s egyúttal egy olyan görbét is, mely tartalmazza *P*-t; ennek sebességvektora – a korábban tárgyaltak alapján – megadja a pont pályagörbéjének érintőjét, így az érintősík meghatározottnak tekinthető. Bizonyos esetekben azonban, ha például az alkotó síkmozgást végez, egyszerűbben is eljárhatunk. Erre mutat példát az alábbi, az I. típusba tartozó azon felület, melynek egyik vezető görbéje kör, a másik vezető görbéje egyenes. Az *AB* alkotó-szakasz *A* pontja a K_1-ben lévő körön, *B* végpontja a K_2-ben lévő egyenesen mozog (27. ábra). Mivel a két végpont egymással párhuzamos síkokban mozog és a szakasz hossza nem változik, az alkotó első képsíkszöge állandó, ugyancsak állandó hosszúságú a szakasz első képe is, mely síkmozgást végez az alkotóval együtt. Az alkotó minden pontja a K_1 képsíkkal párhuzamosan mozog, a sebességek iránya megegyezik vetületükével. Az alkotó első képe sebességpólusának szerkesztéséhez nincs is szükség *A* vagy *B* sebességvektorának meghatározására, elegendő állásuk ismerete, melyekre merőlegest állítva kapjuk az *S* sebességpólust, annak birtokában már $\mathbf{v}_P$ állása ismertté válik. Mivel *P* sebességvektora párhuzamos a K_1 képsíkkal, a *P* pont pályagörbéjének érintője első fővonala a felület érintősíkjának, miért is az S érintősík első nyomvonala párhuzamos a sebességvektorral.



27. ábra

Bonyolultabb a feladat a II. típusba tartozó konoid felület esetében, amelynek alkotói párhuzamosak az S első vetítősíkkal és egy K_2-re merőleges g_1 egyenest továbbá egy g_2 kört metszenek (28. ábra). Az *e* alkotó *P* pontjához tartozó érintősík meghatározása, pontosabban az alkotó v_e sebességvonalának megszerkesztése végett legyen az alkotó *B* pontjának sebessége a tetszőleges nagyságú $\mathbf{v}_B$. E vektor végpontját tartalmazó v_e sebességvonal első képe párhuzamos az alkotó első képével, mert az alkotó az iránysíkkal párhuzamosan mozog, tehát minden pontjának az iránysíkra merőleges összetevője egyenlő. Az alkotó *A* pontjának sebességvektor-végpontja (a vektor állása nem azonos g_1 állásával!) egyrészt benne van az alkotó második vetítősíkjában, másrészt egy *e* -re merőleges és az *A* ponton átmenő síkban. A két sík metszésvonalának képei metszik ki $\mathbf{v}_A$ végpontjának első képét. Fölvetítve kapjuk a sebességvektor végpontjának második képét, így megszerkeszthetővé válik a sebességvonal második képe. A *P* pont sebességvektorának végpontját a most már ismert sebességvonalon annak figyelembe vételével határozhatjuk meg, hogy az *(APB)* osztóviszony egyenlő a megfelelő sebességvektor-végpontok osztóviszonyával. A *P* ponthoz tartozó sebességvektor egyenesének első nyompontját az *A* ponttal összekötve nyerjük a keresett P érintősík p_1 nyomvonalát. A p_2 nyomvonal szerkesztése már nem igényel magyarázatot.
A szerkesztés helyességének ellenőrzésére egyszerű és nem érdektelen lehetőség nyílik. Először azt kell belátni, hogy a felület egyetlen, K_1 -re merőleges alkotóját tartalmazó síkok a felületet ellipszisekben metszik. Ugyanis egy-egy ilyen sík, például az M sík minden alkotónak a két képsík közé eső darabját azonos arányban osztja két részre. Ebből következik, hogy az M sík által a felületből kimetszett *m* görbe második képe kör, de mivel e kör síkmetszet vetülete, a metszetgörbe ellipszis. Az *m* metszet *P*-beli érintőjének első nyompontja a korábban megszerkesztett p_1 nyomvonalra esik, ami mindkét szerkesztésünk helyességét bizonyítja.



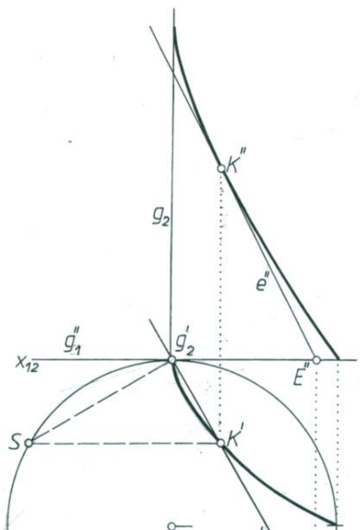
28. ábra

KONTÚRGÖRBE SZERKESZTÉSE

Vonalfelület kontúrgörbéjének kinematikai alapon történő szerkesztésével kapcsolatban az alábbi két lehetőség valamelyike – esetleg mindkettő – áll rendelkezésre:

I. Ha egy alkotó valamely *K* pontja kontúrpont, akkor az alkotó és *K*- nak $\boldsymbol{v}_K$ sebessége az alkotóval olyan érintősíkot határoz meg, mely merőleges a képsíkra.

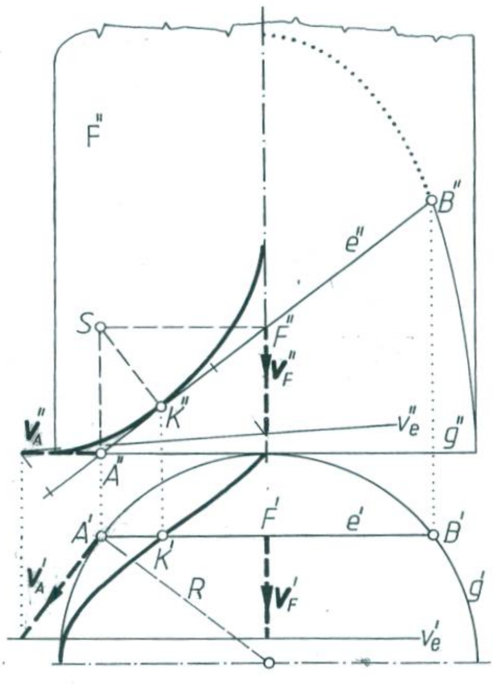
II. Ha a vonalfelület valamely alkotó-vetületének pillanatnyi mozgása egy *S* sebességpólus körüli forgás, akkor ezen az alkotó-vetületen a kontúrpont vetülete – ha létezik – az *S* pont talppontja; erre példa volt már a 17. ábra.



29. ábra

A fentiek alkalmazását két példa szemlélteti: egy III. típusú felület legyen az első példa, melyben g_1 a K_1 - ben lévő kör, g_2 a képsíkra merőleges és a kört metsző g_2 egyenes (29. ábra).
Az *e* alkotónak kontúrpontját a fentiek szerint megkaphatjuk, ha meghatározzuk azt a pontját, melynek pillanatnyi sebessége merőleges K_2 - re. Vegyük figyelembe, hogy az alkotó első képsíkszögének állandósága miatt az alkotó bármely szakaszának első vetülete állandó hosz - szúságú, pl. az *E*- től g_2 - ig terjedő szakaszé is, melynek pillanatnyi sebességpólusa az *S* pont. Más szóval, az alkotó síkmozgást végez, az *S* pont első vetítő egyenese körül, az adott pillanatban. Mivel a keresett kontúrponthoz tartozó érintősík K_2 - re merőleges, következőleg a v_K vetületéhez tartozó pólussugár a képtengellyel párhuzamos, kijelölhető, a sebességpólus - ból a képtengellyel húzott párhuzamos segítségével.

Az általánosan használható módszert szemlélteti a következő példa.
Az V. típusba tartozó felület *AB* szakaszának *A* pontja egy *R* sugarú henger *g* alapkörén mozog, miközben *B* pontja a hengeren, s az alkotó, mozgása során párhuzamos a K_2 képsíkkal (30. ábra).



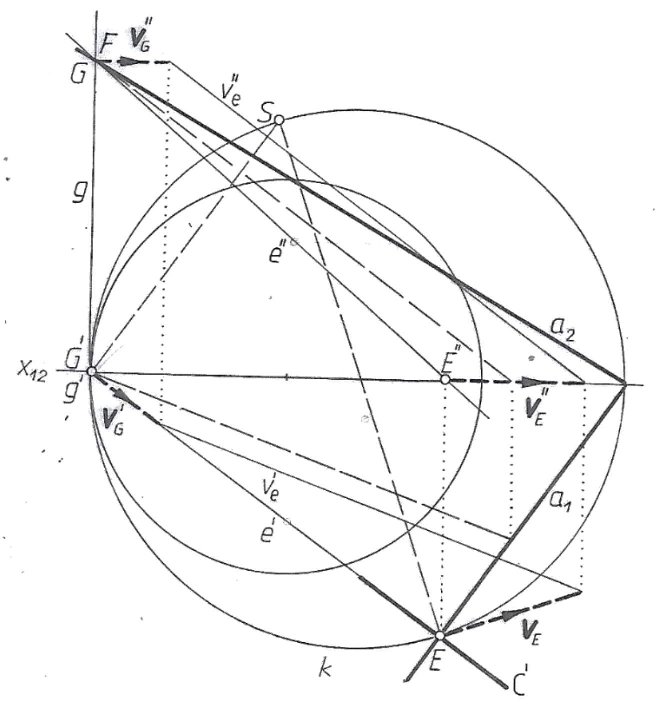
30. ábra

A félhengerben mozgó szakasz által leírt felület *e* alkotója második képének vetületi mozgását vizsgáljuk, e mozgás sebességpólusának e''-re vonatkozó talppontja a keresett kontúrpont képe. Az *S* sebességpólus megszerkesztéséhez szükség van az alkotó második képe két pont - jának sebességvektorára (pontosabban e vektorok állására). Az *A* pont tetszőleges $\mathbf{v}_A$ sebessé - gének második képét felvetítéssel nyerjük. A *B* pont sebessége helyett előnyösebb foglalkoz - ni az *A,B* szakasz *F* felező pontjáéval. E pont sebességének második képe ugyanis párhuza - mos a henger alkotóival, következésképp az alkotó második képének *S* sebesség-pólusa rögtön megszerkeszthető, és ennek e''-re vonatkozó K'' talppontja a keresett pont.

FŐSÍKOK MEGHATÁROZÁSA

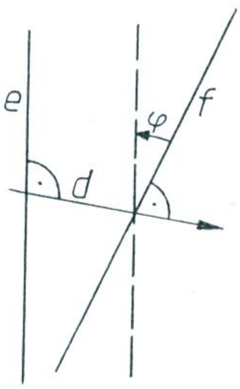
A korábbiakban szereplő aszimptota-síkra és centrális síkra használjuk a következőkben a fősík elnevezést. A vonalfelületek közül a torzfelületek egyik tulajdonsága az, hogy az alkotó-nak általában minden pontjához más és más érintősík tartozik. Mivel az alkotó valamely *P* pontjában az érintősíkot meghatározza az alkotó és a *P* pont pillanatnyi sebességvektorának

állása – feltéve, hogy az különbözik az alkotóétól – továbbá az alkotó ideális pontjához tartozó sebességvektor végpontja azonos az alkotó sebességvonalának ideális pontjával, ezért a keresett érintősík, vagyis az aszimptota-sík az alkotót tartalmazó és a sebességvonallal párhuzamos sík. Megemlítendő, hogy a felület alkotóival párhuzamos és egy ponthoz illeszkedő egyenesek kúpfelülete, vagyis a felület irránykúpjának valamely érintősíkja párhuzamos az érintési alkotóval párhuzamos felületi alkotó aszimptota-síkjával.
Az alkotót tartalmazó és az aszimptota-síkra merőleges sík az alkotó centrális síkja, mely a felületet a centrális pontban érinti. A centrális pontok összessége alkotja a felület szűkülő vonalát (strikciós görbe); egyköpenyű forgáshiperboloid esetében a szűkülő vonal a torokkör.
Fősíkok meghatározására példaként tekintsük a IV. típusba tartozó azon felületet, melynek alkotói metszenek egy első képsíkra merőleges *g* egyenest, érintenek egy gömböt és első képsíkszögük adott ε (31. ábra).



31. ábra

A felület egy alkotója legyen az *e* egyenes. Első képét tetszőlegesen felvéve és első vetítő síkját képsíkba forgatva az alkotó első képsíkszögének ismeretében megszerkeszthető lenne az alkotó és a gömb érintkezési pontja, de most ez mellőzhető. Rövid számítással igazolható a felületnek az az érdekes tulajdonsága, hogy állandó nagyságú első képsíkszögű alkotóinak első nyomgörbéje a *k* kör. Az *e* alkotó sebességvonalának megszerkesztése végett, legyen az *E* nyompont sebessége tetszőleges nagyságú v_E. Az alkotó másik pontja lehet a *g* egyenesre eső (de csak pillanatnyilag a *G* - vel egybeeső *F* pont. A síkmozgást végző alkotó sebességpólusa az *S* pont, melynek ismeretében v_F meghatározható. Az alkotó sebességvonalával párhuzamos és az alkotót tartalmazó A aszimptota-sík, nyomvonalai a_1 és a_2. Nem meglepő, hogy az aszimptota-sík nyomvonala merőleges az alkotó vetítősíkjára, mert a felület irány - kúpja most forgáskúp az alkotók azonos első képsíkszöge miatt, és *e* az aszimptota -síknak esésvonala. Az alkotó centrális síkja azonos első vetítősíkjával, a centrális pont az alkotó *F* pontja, a felület szűkülő vonala a *g* egyenes része.
Figyelemre méltó, hogy az alkotó pillanatnyi mozgása tekinthető a *g* egyenes körüli csavarmozgásnak, de az aszimptota-síkra merőleges, *S* tengelyű csavarmozgásnak is. A alkotó és a felület érintkezési pontja (ceruzával szerkesztve) két módon látható az ábrán.



32. ábra

ELOSZLÁSI PARAMÉTER MEGHATÁROZÁSA

Legyen egy vonalfelület két alkotója *e* és *f* , a két alkotó egymástól mért távolsága *d,* az alkotók egymással bezárt szöge φ (32. ábra). Torzfelületek esetén ha az *f* alkotó egyre közelít *e*-hez, azaz *d* tart a zérushoz, a d/φ hányados általában zérustól különböző határértékhez tart, az *e* alkotó *p* eloszlási paraméteréhez. Az eloszlási paraméter a két alkotó által határolt felületsáv csavarodottságának jellemzője. Számítással történő meghatározására a korábban látott képlet, a $p = \frac{v_3}{v_2} l$ alkalmas.

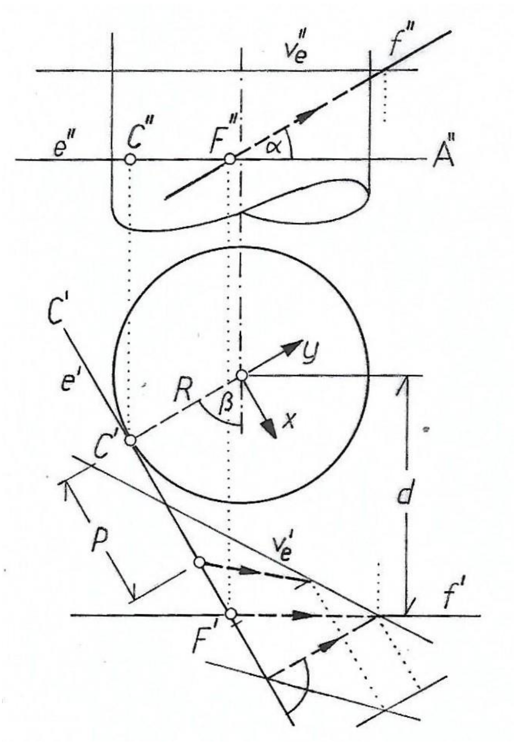
Példaként határozzuk meg egy hengerkonoid alkotónak a paraméterét. A felületet a henger tengelyére merőleges iránysíkkal párhuzamos és az *f* egyenest metsző henger-érintők alkotják (33. ábra).

Adatok: $R = 3,\ \alpha = 30°,\ \beta = 60°,\ d = 5{,}5.$

Az *f* egyenes *F* pontját $v = 4$ sebességgel indítva és figyelembe véve, az A aszimptota-sík helyzetét, valamint a *ve* sebességvonalát, a paraméter kiszámításához szükséges sebesség-adatok: $v_2 = 3$; $v_3 = 2$. A képlet alkalmazásához szükséges harmadik adathoz a C centrális sík és az alkotó centrális pontjának ismerete szükséges, vagyis a $CF = l = 4{,}618$ távolság. A képlet alapján a paraméter:

$$p = \frac{v_3}{v_2} l = \frac{2}{3} 4{,}618 = 3{,}078.$$

Ellenőrizhető az eredmény a korábban látott tétel segítségével (a csavarmozgás-problémát tárgyaló részben), mely szerint az alkotó paraméterét azon pontjának a centrális ponttól mért távolsága adja, melynek érintő síkja felezi az aszimptota-sík és a centrális sík hajlásszögét. Az alkotóra merőleges síkra képezett vetület segítségével állítjuk elő esetünkben ezt a pontot, melynek a centrális ponttól mért távolsága jó közelítéssel egyezik a paraméter számított értékével.



33. ábra

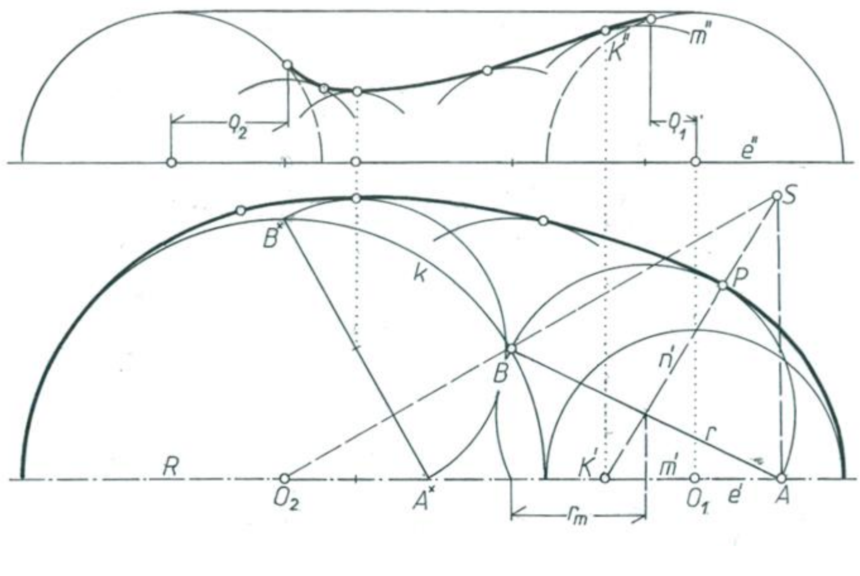
BURKOLÓFELÜLET ÁBRÁZOLÁSA

Befejezésül arra mutatunk példát, hogy a kinematikai eszközök nem csupán vonalfelületek ábrázoló geometriai feladatai során alkalmazhatók.

Egy *r* sugarú gömb *A* pontja egy *e* egyenesen, átellenes *B* pontja egy *R* sugarú *k* körön mozog. Feladatunk a mozgó gömb helyzeteit burkoló felület (felének) ábrázolása (34. ábra).

A kontúrgörbék szerkesztése

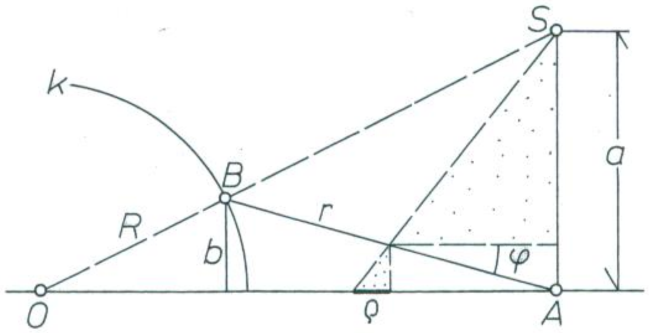
Most az első kontúr jelent problémát. A mozgó gömb helyzeteinek első képei által alkotott körsereg burkológörbéjét kell megszerkeszteni. A gömbvetületek és a kontúr érintkezési pontjait az aktuális sebességpólus felhasználásával jelöljük ki. A részletes magyarázatot mellőzve csak arra mutatunk rá, hogy amikor a gömb két átellenes pontja az $A^x B^x$ helyzetbe jut, akkor a kontúrkép megfelelő pontjában az érintő *e* -vel párhuzamos.



34. ábra

„ÖNÁTHATÁSI GÖRBE”
A felületnek van olyan görbéje, melyben a felület önmagát metszi; K_2-vel párhuzamos szimmetria síkjába esik. E síkot a gömbsereg változó sugarú körökben metszi, például az *AB* helyzethez tartozó gömböt az *m* körben, melynek sugara r_m . Hogy az önáthatási görbe hol érintkezik az *m* metszetkörrel, annak megállapításhoz vegyük figyelembe, hogy a burkoló - felület a „szomszédos”, „egymáshoz végtelen közeli” gömbök közös köreinek halmaza. Az *AB* helyzethez tartozó gömb esetén ez az *n* kör. Az önáthatási görbe *m*-re eső pontja az *m* és *n* körök közös *K* pontja. Az önáthatási görbe burkolja azokat a köröket, melyeket az *m* körhöz hasonló módon nyerhetünk a többi gömbhelyzet esetében. Az ábrán még három ilyen kör látható, a szerkesztésüket mellőzve.

AZ ÖNÁTHATÁSI GÖRBE SZÉLSŐ PONTJAI
Megszerkeszthetők az önáthatási görbe szélső pontjai is! A 35. ábráról leolvasható, hogy egy *m* metszetkörhöz tartozó ρ távolság és az r sugár közti arány az ábra hasonló háromszögei alapján: $\dfrac{\rho}{b/2} = \dfrac{r.\cos\varphi}{a-b/2}$, $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\cos\varphi}{2a/b-1}$. Ha $\varphi \to 0$, $\cos\varphi \to 1$, $a/b \to \dfrac{R+2r}{R}$, ennél fogva $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{R}{4r+R} = \dfrac{1}{1+4r/R}$. A mozgó gömb másik szélső helyzetében hasonló számítással az arány $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{R}{4r-R}$.



35. ábra

ZÁRSZÓ

A kinematikai eszközök alkalmazásának léteznek további lehetőségei az ábrázoló geometriában és a konstruktív differenciálgeometriában, melyekkel itt nem foglalkoztunk, de talán a tárgyalt anyag is elegendő arra, hogy a kinematikát mérlegeljük, mint az említett két geometriai tudományág lehetséges segédeszközét.
Felmerülhet a jogos kérdés: mi értelme van az itt tárgyalt kinematikával vegyített ábrázoló geometriának a minden tudományágat átalakított számítástechnika, konkrétan a számítógépi ábrázoló geometria korában.
Erre talán csak egy válasz adható: az ábrázoló geometria eredeti hagyományos, nem gépi módjának mindig voltak és bizonnyal vannak hívei, olyan kiválóságok is, mint Kármán Tódor és Rubik Ernő, kiket vonz(ott) az ábrázoló geometria sajátos szépsége, a térbeli alakzatok és összefüggések elképzelni, meglátni tudását „jutalmazó” tulajdonsága, hogy gyors, egyszerű eszközökkel teszi lehetővé a csak hosszas számítások révén feltárható lényeget.

IRODALOMJEGYZÉK:

[1] ***Strommer Gy.***: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[2] ***E. Müller***: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Band III.
Konstruktive Behandlung der Regelflächen, bearbeitet von J. L. Krames,
Leipzig und Wien, Franz Deuticke, 1931.

[3] ***J. L. Krames***: Darstellende und kinematische Geometrie für Maschienenbauer,
Wien, Franz Deuticke, 1947.

[4] ***W. Wunderlich***: Ebene Kinematik, Mannheim: Bibl. Inst. 1968.

2024. augusztus 28.

TÁRGYMUTATÓ